carattere non viene esaurito in tutta la sua latitudine, perché, a ben guardare, la retta non è introdotta nelle -considerazioni della planimetria che mercé il seguente *postulato :* facendo combaciare due piani su ciascuno dei quali esiste una retta, basta che le due rette si sovrappongano in due punti, perché riescano sovrapposte in tutta la loro estensione.

Ora questo carattere, così circoscritto, non è peculiare alle linee rette rapporto al piano; esso sussiste eziandio (in generale) per le linee geodetiche di una superficie di curvatura costante rapporto a questa superficie. Una linea geodetica ha già sopra qual-sivoglia superficie la proprietà di essere (generalmente parlando) determinata senza ambiguità da due dei suoi punti. Ma per le superficie di curvatura costante, e per queste sole, sussiste integralmente la proprietà analoga a quella della retta nel piano, cioè : se si hanno due superficie, la cui curvatura sia costante in ogni punto ed eguale in entrambe, e se su ciascuna di esse esiste una linea geodetica, facendo combaciare le due superficie in modo che le geodetiche si sovrappongano in due punti, esse riescono sovrapposte (generalmente) in tutta la loro estensione.

Ne consegue che, salvi quei casi nei quali questa proprietà va soggetta ad eccezioni, i teoremi che la planimetria dimostra, col mezzo del principio di sovrapposizione e del postulato della retta, per le figure formate sul piano da linee rette, sussistono altresì per le figure formate analogamente sopra una superficie di curvatura costante da linee geodetiche.

In ciò si fondano le molteplici analogie della geometria della sfera con quella del piano (alle rette di questo corrispondendo le geodetiche, cioè i cerchi massimi, di quella) analogie che i geometri hanno già notate da lungo tempo. Se altre analogie, di specie diversa ma di eguale origine, non sono state del pari notate prima d'ora, lo si deve ascrivere a ciò che il concetto di superficie flessìbili ed applicabili le une sulle altre, non è diventato familiare che in questi ultimi tempi.

Abbiamo fatta allusione ad eccezioni che possono interrompere o limitare l'analogia ora discorsa. Queste eccezioni esistono realmente. Sulla superficie sferica p. es., due punti cessano di determinare senza ambiguità un cerchio massimo quando sono diametralmente opposti. Questa è la ragione per cui alcuni teoremi della planimetria non hanno i loro analoghi sulla sfera, come p. es. il seguente : due rette perpendicolari ad una terza non possono incontrarsi.

Queste riflessioni sono state il punto di partenza delle nostre presenti ricerche. Abbiamo incominciato col notare che le conseguenze di una dimostrazione abbracciano necessariamente l'intera categoria degli enti nei quali esistono tutte le condizioni neces-sarie alla sua legittimità. Se la dimostrazione è stata concepita in vista di una determinata categoria di enti, senza che in essa sieno state

effettivamente introdotte quelle determinazioni che individuano la categoria stessa in confronto di una categoria più